AUTÓMATAS PROBABILÍSTICOS O ESTOCÁSTICOS

Autómatas Probabilísticos

- En su funcionamiento interviene el concepto de probabilidad, asociada a que se produzca una determinada transición.
- Son autómatas finitos en los que las transiciones entre estados a partir de símbolos de entrada pueden no producirse de forma segura (probabilidad = 1) sino que existe una determinada probabilidad asociada a que se produzca la transición.
- No se habla del estado en el que se encuentra el autómata en un determinado instante, sino de la probabilidad de que se encuentre en cada uno de los estados del autómata.
- Aplicaciones reales basadas en comportamientos probabilísticos de transición, pej. Movimiento de robots, reconocimiento de voz, lenguaje natural, etc.

Definición

AFP = (Σ, Q, M, P(0), F), es una quíntupla

- Σ: alfabeto de entrada
- Q: conjunto de estados, finito y no vacío
- M: conjunto de matrices de probabilidad de transición entre estados.
  M = {Ma │ a ∈ Σ}, Ma contiene las probabilidades de transición de un estado a otro cuando se recibe el símbolo a. Para cada símbolo del alfabeto, existe una matriz de probabilidades
- P(0): vector de estado inicial: contiene la probabilidad de encontrarse en el estado inicial. Cada estado de Q tiene asociada una probabilidad de ser el estado inicial
- F⊆Q: Conjunto de estados finales o de aceptación (no vacío).

Matrices de Probabilidad de Transición

- Por cada símbolo *a* de Σ se define una matriz de probabilidad de transición, M(a), que define la probabilidad de dado que el autómata se encuentre en un determinado estado y reciba el símbolo de entrada *a*, transite a cada uno de los demás estados.

$$\forall a \in \Sigma, \exists\ M(a) = \begin{pmatrix} p11 & p12 \;...\; p1n \\ p21 & p22 \;...\; P2n \\ ... & ...... \quad .... \\ pn1 & pn2 \;....pnn \end{pmatrix}$$

donde:

- n: número de estados: │Q│
- pij: probabilidad de que estando en el estado *i* y recibiendo una *a* como entrada, transite al estado *j*. 0 ≤Pij ≤ 1
- para cada estado *i*, se cumple: $\sum_{j=1}^{n} pij = 1$

Vectores de estados

- P(t) es el vector de estados en un instante t. Indica la probabilidad de cada estado en el instante t
  - Tiene una componente para cada estado del AFP.
  - P(t) = (P1(t), ..., Pn(t)), para un AFP con *n* estados
  - Cada Pi(t) es la probabilidad de que el AFP se encuentre en el estado i.
  - Se cumple: $\sum_{i=1}^{n} pi = 1, \forall t$
  - La probabilidad de que el AFP se encuentre en el instante t+1 en el estado i, si el símbolo que se lee es *"a"*, deberá considerar la suma de las probabilidades de llegar a i desde cada uno de los j posibles:

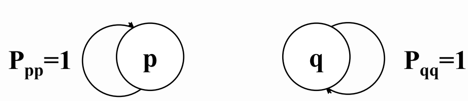
    $$Pi(t+1) = \sum_{j=1}^{n} pj(t)\, x\, Mji(a)$$

  - Para el vector completo:

    $$P(t+1) = P(t)\, x\, M(a)$$

AF Probabilísticos. Ejemplo

- Según los valores de M(a) y M(b) **(I)**:
  - M (a) = M (b) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



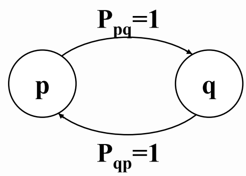
  - t = 0, P(0) = {Pp(0) Pq(0)}
  - t = 1, a la llegada de una "a" o una "b":

    P(1) = {Pp(0) x 1 + Pq(0) x 0 Pp(0)x 0+ Pq(0) x 1} = {Pp(1) Pq(1)}

AF Probabilísticos. Ejemplo

- Según los valores de M(a) y M(b) **(II)**:

  - M (a) = M (b) = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



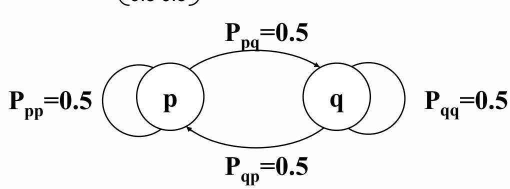
  - t = 0, P(0) = {Pp(0) Pq(0)}
  - t = 1, a la llegada de una "a" o una "b":

    P(1) = {Pp(0) x 0 + Pq(0) x 1 Pp(0)x 1+ Pq(0) x 0} = {Pq(1) Pp(1)}

AF Probabilísticos. Ejemplo

- Según los valores de M(a) y M(b) **(III)**:

  - M (a) = M (b) = $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$



  - t = 0, P(0) = {Pp(0) Pq(0)}
  - t = 1, a la llegada de una "a" o una "b":

    P(1) = {Pp(0) x 0.5 + Pq(0) x 0.5 Pp(0)x 0.5+ Pq(0) x 0.5} = {Pp(1) Pq(1)}

AF Probabilísticos. Ejemplo

- Sea el AFP, AFP1= ({0,1}, {q_1, q_2, q_3}, M, (1/3 1/3 1/3), {q_3}), donde

  M = {M(0), M(1)}

  $$M(0) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Si P(0) = (1/3 1/3 1/3) **y se recibe un 0**, escribir P(1).

  $P(1) = \{P_1(1)\ P_2(1)\ P_3(1)\}$

  $P_1(1) = \sum_{j=1}^{3} P_j(0) x M_{j1}(0) = 1/3x1/3 + 1/3x1/2 + 1/3x0 = 5/18$

  $P_2(1) = \sum_{j=1}^{3} P_j(0) x M_{j2}(0) = 1/3x1/3 + 1/3x0 + 1/3x1 = 4/9$

  $P_3(1) = \sum_{j=1}^{3} P_j(0) x M_{j2}(0) = 1/3x1/3 + 1/3x1/2 + 1/3x0 = 5/18$

  P(1) = (5/18 4/9 5/18), por lo que en el instante t=1, el estado más probable es q_2

Lenguaje aceptado por un AFP

- Sea el AFP = (Σ, Q, M, P(0), F, Θ), donde Θes un umbral con valores entre 0 y 1.
  - Se recibe la palabra $x = a_1 a_2 ... a_p$
  - El vector de estados en el instante *p* será:

    $$P(p) = \underbrace{\underbrace{P(0) \times M(a1)}_{P(1)} \times M(a_2)}_{P(2)} \times \ldots \times M(a_p)$$

    .... Desde el estado inicial con x
  - El lenguaje aceptado por el AFP es:

    L = {x │ x∈Σ + y Pf(x) ≥ Θ} siendo Pf(x): probabilidad del estado final

Una palabra es aceptada por un AFP cuando la probabilidad del estado final, una vez calculado el vector de estados, es ≥ Θ

Lenguaje aceptado por un AFP. Ej

- En el APF1 anterior, calcular el vector de estados P(x) al recibir la palabra x = 01 y decir si sería aceptada por el AFP1.

  P(01) = P(0) x M(0) x M(1) =

  $$(1/3\ 1/3\ 1/3) \times \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (5/18\ 4/9\ 5/18) \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

  = (31/108 47/108 5/18)

  Para Θ = 1/2 la palabra x = 01 no sería aceptada Pf =5/18 < 0.5

  Para Θ = 1/4 la palabra x = 01 sería aceptada Pf =5/18$\approx$ 0.28 > 0.25

  El lenguaje aceptado depende del umbral, Θ

AFD's como AFP's

- Se pueden ver los AFD's como un caso particular de AFP:

  $$AFD = (\Sigma, Q, f, q_0, F) \Rightarrow AFP = (\Sigma, Q, M, P(0), F, \Theta)$$

  donde:

  - P(0) es un vector booleano, que contiene un único 1, en la componente del estado inicial.
  - $\forall$ a$\in\Sigma$, M(a) es una matriz de 0's y 1's que se construye a partir de f, haciendo Maij = 1 si f(qi,a) = qj y Maij = 0 en caso contrario.
  - Todas las filas de M(a) tendrán un solo 1.
  - Θ>0, lo habitual es Θ=1.

$\forall$ AFD $\exists$ AFP equivalente $\Rightarrow$ L. Regulares $\subset$ L. reconocidos por AFP's