## Autómatas Celulares

- Definición de Autómata Celular
- Configuración de un autómata
- Numeración de reglas
- Tipos de autómatas
- Autómata finito asociado a un AC

### 1. Definición de Autómata Celular

Un autómata celular es una estructura de la forma (d, r, Q, #,V, f) siendo:

• d: la dimensión del autómata $d>0$.

La dimensión indica la organización espacial de la células.

La posición de cada célula se expresa mediente un vector de $Z^d$.

Para d=1: autómata unidimensional    Posición de la células: Z

Para d=2: autómata bidimensional    Posición de las células: ZxZ

• r: es el índice de localidad que marca el tamaño de la vecindad.

Indica el número de vecinas para cada célula.

• Q: es el conjunto de estados. El estado en el que se encuentra cada célula.

Por ejemplo Q={0,1}

• #: es un estado de Q, llamado estado quiescente.

Indica la ausencia de actividad

**1. Definición de Autómata Celular** (Continuación)

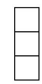
Un autómata celular es una estructura de la forma (d, r, Q, #,V, f) siendo:

• V: es un vector de vecindad que contiene r elementos distintos de $Z^d$. $V \subset (Z^d)^r$

Indica las células vecinas. V=(z1,…,zr)

Ejemplo: si d=2, V=((0,1),(0,-1)) y la célula es y=(1,1),

su vecindad es: y+(0,1)=(1,2)   y+(0,-1)=(1,0)



Vecindad de Moore: región cuadrada alrededor de la célula

• f: Función de transición o regla del autómata

f: $Q^{r+1} \rightarrow Q$

$$f(q_{i-r}(t-1), q_{i-r+1}(t-1), ..., q_{i+r}(t-1)) = q_i(t)$$

siendo $q_i(t)$ el estado de la célula i en el tiempo t.

Para cada célula, f nos dice el estado que tendrá en la siguiente unidad de tiempo, en función de su estado actual y del estado de sus celdas vecinas.

**2. Configuración de un autómata**

Se define la configuración de un autómata celular C o palabra de C a cualquier función $\Sigma : Z^d \rightarrow Q$.

Se define la configuración siguiente de $\Sigma$ como la palabra que resulta de aplicar la regla del autómata a sus células, es decir f($\Sigma$).

f(0): es el conjunto de todas las posibles configuraciones

f(1): Resultado de aplicar la regla del autómata a palabras f(0).

…

f(t)

### 3. Ejemplo de autómata unidimensional

C=(1,2,{0,1},0,V,f) siendo V={-1,1} y la regla

Autómata1:

$$f(q_{i-1}(t-1), q_i(t-1), q_{i+1}(t-1)) = (q_{i-1}(t-1) + q_{i+1}(t-1)) \bmod 2$$

Autómata2:

$$f(q_{i-1}(t-1), q_i(t-1), q_{i+1}(t-1)) = (q_{i-1}(t-1) + q_i(t-1) + q_{i+1}(t-1)) \bmod 2$$

La evolución de los autómatas unidimensionales es:

| Autómata1 | | Autómata2 |
|---|---|---|
| 1 | t=0 | 1 |
| 1 0 1 | t=1 | 1 1 1 |
| 10 0 0 1 | t=2 | 10 1 0 1 |
| 101 0 1 0 1 | t=3 | 110 1 0 1 1 |
| 1000 0 0 0 0 1 | t=4 | 1000 10 0 0 1 |

### 3. Ejemplo de autómata bidimensional. Juego de la vida

C=(2,8,{0,1},0,V,f) siendo

V={(-1,0),(-1,1),(0,1),(1,1),(1,0),(1,-1),(0,-1),(-1,-1) } Vecindad de Moore

$$f(q_0(t-1), q_1(t-1), \ldots, q_8(t-1)) = \begin{cases} q_0 & si \quad \sum_{i=1}^{8} q_i(t-1) = 2 \\ 1 & si \quad \sum_{i=1}^{8} q_i(t-1) = 3 \\ 0 & \end{cases}$$

El estado siguiente se determina en función del número de células vecinas vivas y no de su posición. De esta forma:

- Si el número es inferior a 2 o superior a 3, la vida no es posible por aislamiento y superpoblación.
- Si es 2, hay condiciones para su mantenimiento, pero su aparición no es espontánea
- Si es 3, si produce una nueva célula viva.

## 4. Numeración de reglas

Sea C un autómata unidimensional, con Q={0,1} y r=2. K=módulo(Q)

Una regla de este autómata posee tres argumentos binarios:

$$f(q_{i-1}(t-1), q_i(t-1), q_{i+1}(t-1)) = q_i(t)$$

Teniendo en cuenta que:

- Hay $2^3$ posibles valores para sus argumentos ($k^{r+1}$)
- Para cada uno de ellos tenemos dos (k) salidas

Existen $2^{2^3}=2^8$ reglas diferentes

$k^{k(r+1)}$ reglas diferentes para un caso general.

| | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Regla | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Regla | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

….

## 4. Numeración de reglas (Continuación)

Dado un autómata celular, el conjunto de todas las posibles reglas a tener en cuenta es numerable.

Cada regla se puede especificar por su secuencia binaria (en base k) y por tanto por su número decimal equivalente.

<u>Ejemplo</u>

| | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Regla1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

$1_{10}=00000001_2$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Regla90 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$90_{10}=01011010_2$

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Regla76 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$76_{10}=01001100_2$

## 5. Tipos de autómata

Stephen Wolfram realizó un estudio bastante exhaustivo del comportamiento dinámico de los autómatas unidimensionales. Acorde a este comportamiento, los dividió en cuatro clases diferentes:

•**Tipo1**: Todas las configuraciones evolucionan hacia un estado estable independientemente de la configuración inicial. El sistema resulta predecible. Los patrones desaparecen en el tiempo. No hay cambio en el estado final.

•**Tipo2**: Las configuraciones tienden hacia secuencias estructuras periódicas. El cambio en un único valor en la situación inicial afecta únicamente a una región finita a su alrededor

•**Tipo3**: Presentan un comportamiento caótico. Pequeñas variaciones en las configuraciones iniciales pueden provocar evoluciones diferentes

•**Tipo4**: Es un tipo más impreciso. Generalmente se engloban en este tipo, aquellos autómatas que pasan por una larga fase evolutiva antes de caer en un atractor.

## 6. Autómata finito asociado a un autómata celular

Sea C un autómata celular unidimensional con Q={0,1} y r=2. Los pasos para la construcción de un autómata finito son los siguientes:

• Se toman todos los argumentos de la regla de transición menos el último. Para r=2, se toman los dos primeros.

•Se realizan todas las combinaciones posibles $k^r$ y se consideran como estados.

Para r=2 Q={0,1}, se tienen $2^2$: $q_0$=00, $q_1$=01, $q_2$=10, $q_3$=11

•La función de transición del autómata (grafo) se obtiene a partir de la regla de transición del autómata de la siguiente forma:

Si f(<u>ab</u>c)= 0 entonces el estado ab transita a bc cuando recibe un 0

Si f(<u>ab</u>c)= 1 entonces el estado ab transita a bc cuando recibe un 1

Ejemplo:

si f(001)=0 entonces $q_0$=00 transita a $q_1$=01 cuando recibe un cero

## **6. Autómata finito asociado a un autómata celular** (Continuación)

Ejemplo

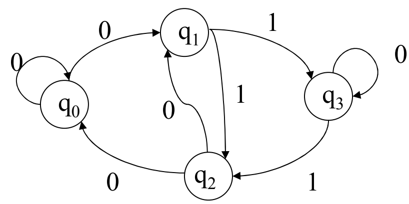
Sea C el autómata unidimensional asociado a la regla 76

| 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Tabla de transición de estados

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0\, q_1$ | |
| $q_1$ | | $q_2\, q_3$ |
| $q_2$ | $q_0\, q_1$ | |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_2$ |

Grafo de transición




## **6. Autómata finito asociado a un autómata celular** (Continuación)

El autómata finito obtenido anteriormente es no determinista. Es posible construir un autómata finito determinista mediante el siguiente mecanismo:

Teniendo en cuenta la tabla de transición anterior

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $q_0$ | $q_0\, q_1$ | |
| $q_1$ | | $q_2\, q_3$ |
| $q_2$ | $q_0\, q_1$ | |
| $q_3$ | $q_3$ | $q_2$ |

(u0,u1,u2,u3)$\rightarrow$0(u0,u1,u3) (u0,u1,u2,u3)$\rightarrow$1(u2,u3)

(u0,u1,u3) $\rightarrow$0(u0,u1,u3) (u0,u1,u3) $\rightarrow$1(u2,u3)

(u2,u3)$\rightarrow$0(u0,u1,u3) (u2,u3)$\rightarrow$1(u2)

(u2)$\rightarrow$0(u0,u1) (u2)$\rightarrow$1( )

(u0,u1)$\rightarrow$0(u0,u1) (u0,u1)$\rightarrow$1(u2,u3)

## 6. Autómata finito asociado a un autómata celular (Continuación)

Los estados accesibles son cinco

$p_0$= (u0,u1,u2,u3)  $p_1$= (u0,u1,u3)  $p_2$= (u2,u3)  $p_3$= (u2)  $p_4$= (u0,u1)

Teniendo en cuenta las transiciones anteriores, la tabla para el autómata finito determinista es:

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ |
| $p_1$ | $p_1$ | $p_2$ |
| $p_2$ | $p_1$ | $p_3$ |
| $p_3$ | $p_4$ | |
| $p_4$ | $p_4$ | $p_2$ |

## 7. Lenguaje Asociado a un autómata celular

• Las palabras del lenguaje se obtienen recorriendo el grafo de todas las formas posibles.

Por ejemplo:

La palabra 00100011 corresponde al recorrido

$$q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2 \rightarrow q_0 \rightarrow q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_3 \rightarrow q_2$$

• Cualquier estado puede ser estado final e inicial

• El lenguaje asociado a un autómata celular es el lenguaje asociado al autómata finito determinista equivalente considerando a todos los estados como estados iniciales y finales.